

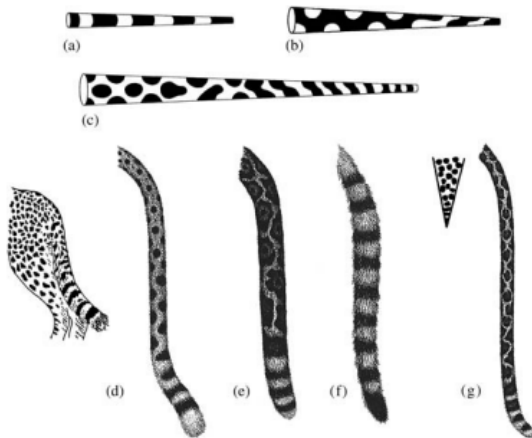
Systèmes de réaction-diffusion Patterns de Turing

Thomas GILETTI

M2 - Introduction à la recherche - 2024

- ▶ La morphogénèse est le développement embryonnaire d'un organisme, et en particulier la différenciation des cellules initialement identiques.
- ▶ L'idée d'Alan Turing était d'observer qu'un système chimique assez simple, dont les paramètres sont constants, pouvait déjà donner lieu à des patterns en espace.

- ▶ On peut retrouver des solutions voir des solutions qui ressemblent à ce qu'on peut observer (from Murray):



- Pour autant, cela reste assez théorique même aujourd'hui. On sait que de tels systèmes chimiques existent, pas s'ils sont bien à l'origine des mécanismes de la morphogénèse (from Murray):

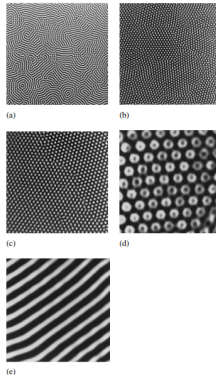


Figure 2.11. Chemical patterns obtained with the reaction-diffusion system with the chlorite-iodide-maleonic reaction from Gatenratte et al. (1994). The domain size is $6 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$. (a) Multiple domains with stripes with wavelength 0.11 mm . (b) This shows multiple domains of hexagonal patterns with different orientations. Here the wavelength is 0.12 mm . (c) This again shows hexagonal patterns with a single boundary separating the hexagonal lattices with different orientations; the wavelength here is 0.18 mm . (d) This shows a fully developed complex black eye pattern; the domain size is $1.6 \text{ mm} \times 1.6 \text{ mm}$. (e) When the hexagonal pattern in (d) becomes unstable it deforms into rhombic structures and the spots line up eventually becoming the striped pattern (in a similar way to the transition patterns in Zhu and Murray 1995); the domain is again $1.6 \text{ mm} \times 1.6 \text{ mm}$. The experimental details are given in Gatenratte et al. (1994). (Photographs reproduced courtesy of Harry Swinney)

- ▶ Un état d'équilibre de l'équation différentielle

$$\partial_t u = f(u),$$

est un zéro de f . Un tel état d'équilibre est:

- ▶ (linéairement) stable si $f'(0) < 0$;
 - ▶ (linéairement) instable si $f'(0) > 0$.
- ▶ Plus généralement, pour un système d'équations différentielles, un état d'équilibre est:
 - ▶ stable si toutes les valeurs propres du linéarisé ont une partie réelle strictement négative;
 - ▶ instable si au moins une valeur propre du linéarisé a une partie réelle strictement positive.

- ▶ On voudrait faire la même chose pour

$$\partial_t u = d\Delta u + f(u).$$

- ▶ Les solutions constantes en espace de cette EDP sont aussi solutions de

$$\partial_t u = f(u),$$

donc $f'(0) > 0$ est une condition suffisante à l'instabilité.

- ▶ Qu'en est-il des solutions non constantes?

- ▶ L'idée est de trouver tous les vecteurs (ou plutôt fonctions), propres, du linéarisé e.g. en 0:

$$\mathcal{L} : u \mapsto d\Delta u + f'(0)u.$$

Mais on est sur un espace (de fonctions) de dimension infinie.

- ▶ On résoud donc en (λ, u) :

$$\lambda u = d\Delta u + f'(0)u.$$

Toutes les fonctions trigonométriques et exponentielles sont solutions, donc tout λ est une valeur propre.

- ▶ Si le domaine est \mathbb{R}^N , il faut restreindre l'espace des fonctions. Par exemple, lorsque Murray parle de stabilité des fronts, il considère uniquement des perturbations à support compact.

- ▶ Dans le cas d'un domaine borné en dimension 1, cela revient à faire des séries de Fourier.
- ▶ Considérons

$$\partial_t u = d\partial_x^2 u + f'(0)u, \quad t > 0, x \in]0, L[,$$

qu'il faut compléter par une condition au bord, par exemple Dirichlet ou Neumann:

$$u(0) = u(L) = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_x u(0) = \partial_x u(L) = 0.$$

- ▶ Alors les fonctions propres sont données par les

$$u_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \text{ou} \quad \cos u_k(x) = \left(\frac{(k-1)\pi}{L}x\right),$$

associées aux valeurs propres:

$$\lambda_1 = f'(0) - d\frac{\pi^2}{L^2}, \quad \lambda_2 = f'(0) - d\frac{4\pi^2}{L^2}, \quad \text{etc.},$$

ou

$$\lambda_1 = f'(0), \quad \lambda_2 = f'(0) - d\frac{\pi^2}{L^2}, \quad \text{etc.}$$

- ▶ On rappelle que 0 est linéairement stable (resp. instable) si toutes les valeurs propres sont strictement négatives (resp. une valeur propre au moins est strictement positive).
- ▶ On conclut donc ici que 0 est donc linéairement stable si et seulement si

$$f'(0) < d \frac{\pi^2}{L^2} \quad \text{dans le cas Dirichlet,}$$

$$f'(0) < 0 \quad \text{dans le cas Neumann.}$$

Dans les deux cas, la diffusion tend à stabiliser l'état d'équilibre 0.

- ▶ Remarquons que toute fonction régulière périodique admet un développement en série de Fourier.
 - ▶ C'est le cas de la donnée initiale, quitte à étendre son domaine de définition au-delà de $]0, L[$ par symétrie puis périodicité.
- ▶ On a donc

$$u(t=0, x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum (a_k \cos(\pi kx/L) + b_k \sin(\pi kx/L)).$$

Pour peu que $u(t=0, \cdot)$ satisfasse déjà la bonne condition au bord, on trouve

$$u(t=0, x) = \sum \alpha_k u_k(x),$$

puis

$$u(t, x) = \sum \alpha_k e^{\lambda_k t} u_k(x).$$

- ▶ On retrouve bien que la convergence de toute solution vers 0 dépend du signe des λ_k .
- ▶ On remarque que la suite $\lambda_k \rightarrow -\infty$:
 - ▶ même lorsque 0 est instable, il existe des solutions (oscillantes) qui convergent vers 0;
 - ▶ plus la fréquence d'une solution est haute, plus elle a de chances de converger vers 0.
- ▶ Ces arguments peuvent se généraliser à des équations de la forme

$$\partial_t u = d \partial_x^2 u + c(x)u.$$

En revanche, on laisse ouverte la fin de l'argument qui consiste à revenir au problème nonlinéaire de départ.

- ▶ Conclusion: pour une unique équation, la diffusion ne peut pas rendre instable un état d'équilibre qui ne l'était pas déjà.
 - ▶ Ce n'est pas si surprenant si on pense à l'équation de la chaleur.
- ▶ L'observation de Turing, c'est que la situation change avec un système:
 - ▶ En particulier, un état d'équilibre peut être stable pour des perturbations constantes en espace, mais instable pour des perturbations non constantes.
 - ▶ Les perturbations non constantes sont donc amplifiées ce qui crée ces patterns.

- ▶ Soit un système linéaire de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u = d_1 \partial_x^2 u + au - bv, \\ \partial_t v = d_2 \partial_x^2 v + cu - dv, \end{cases}$$

qu'on appelle activateur-inhibiteur (u étant le premier, v le second), auquel on ajoute les conditions au bord:

$$\partial_x u(0) = \partial_x v(0) = \partial_x u(L) = 0 = \partial_x v(L) = 0.$$

- ▶ Un tel système peut être obtenu par linéarisation autour d'un véritable système chimique.
- ▶ Le signe est important, le fait que les coefficients de diffusion soient différents aussi.

- ▶ Stabilité de 0 pour les solutions constantes en espace:

$$\begin{cases} \partial_t u = au - bv, \\ \partial_t v = cu - dv. \end{cases}$$

Les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$$

sont (de partie réelle) négatives si

$$\det = bc - ad > 0 \quad \& \quad \text{tr} = a - d < 0.$$

On supposera ces deux inégalités vraies.

- ▶ Stabilité de 0 pour les solutions non constantes en espace: les fonctions propres sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cos(\omega x), \quad \text{avec } \omega = \frac{k\pi}{L}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Le vecteur (α, β) est vecteur propre de la matrice

$$\begin{pmatrix} -d_1\omega^2 & 0 \\ 0 & -d_2\omega^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix},$$

qui admet une valeur propre positive dès que

$$\det = bc + (d_1\omega^2 - a)(d_2\omega^2 + d) < 0,$$

ou

$$\text{tr} = a - d - d_1\omega^2 - d_2\omega^2 > 0.$$

- ▶ La diffusion ne peut pas rendre la trace positive. Remarquons aussi que, si $d_2 = d_1$, alors

$$\det = bc - ad + d_1\omega^2(d - a) + d_1^2\omega^4 > 0.$$

- ▶ En revanche, si $d_2 \gg d_1$, on peut créer une situation où

$$bc - ad > 0, \quad a - d < 0,$$

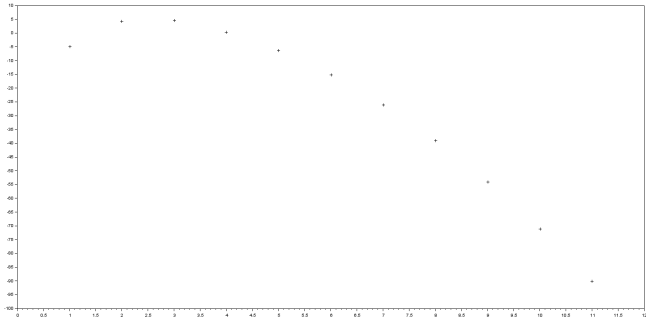
mais

$$bc - ad + \omega^2(d_1d - d_2a) + d_1d_2\omega^4 < 0$$

pour un certain $\omega = \frac{k\pi}{L}$.

Stabilité d'un état d'équilibre: système activateur-inhibiteur

- ▶ Calcul numérique des 11 premières valeurs propres pour un tel choix de paramètres:



- ▶ Toute solution s'écrit alors sous la forme

$$(u, v) = \sum a_k \mathbf{v}_k e^{\lambda_k t} \cos(\omega_k x).$$

A moins que $a_k = 0$, en temps grand, la somme est dominée par

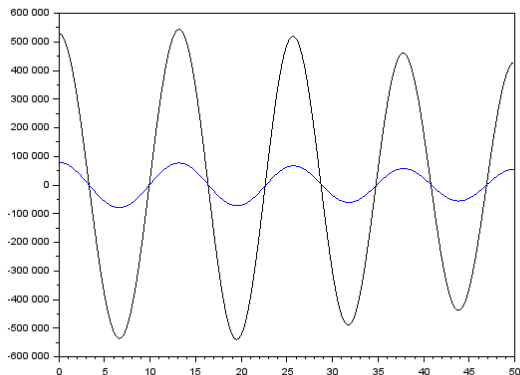
$$a_k \mathbf{v}_K e^{\lambda_K t} \cos(\omega_K x),$$

avec $K > 0$ tel que

$$\lambda_K = \max_k \lambda_k > 0.$$

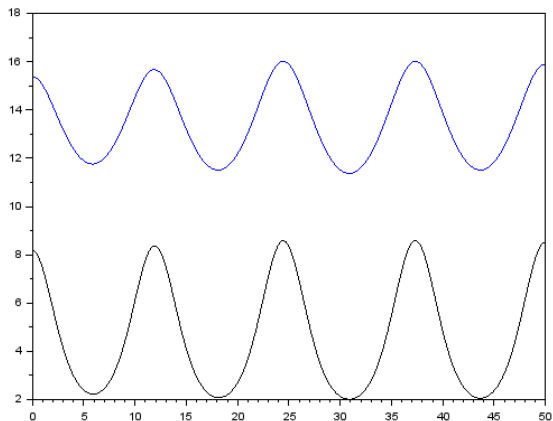
D'où l'apparition d'oscillations et de patterns.

- ▶ Dans le cas linéaire, la solution croit jusqu'à poser des problèmes numériques, mais on peut quand même voir:



Stabilité d'un état d'équilibre: système activateur-inhibiteur

- Pour un système non linéaire (bien choisi), on va voir la solution converger vers de "nouvelles" solutions stationnaires non constantes en espace:



- La taille du domaine joue aussi un rôle, via les fréquences instables (from Murray):

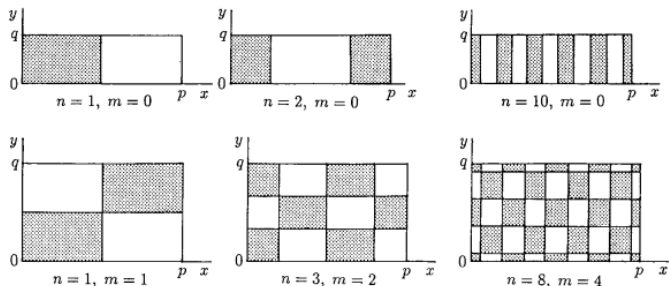


Figure 2.9. Typical two-dimensional spatial patterns indicated by the linearly unstable solution (2.43) when various wavenumbers are in the unstable range. The shaded regions are where $u > u_0$, the uniform steady state.

Stabilité d'un état d'équilibre: système activateur-inhibiteur

- ▶ La taille (et la géométrie) du domaine joue aussi un rôle, via les fréquences instables (from Murray):

