# Equations de réaction-diffusion
# Fronts de propagation

Thomas GILETTI

M2 - Introduction à la recherche - 2024

# Introduction

- Equation aux dérivées partielles de la forme:

$$\partial_t u = d\Delta u + f(u), \quad t > 0,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

avec $u$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $d > 0$, $f$ une fonction à préciser, et

$$\Delta u = \sum \partial_{x_i}^2 u.$$

- C'est un système dynamique d'évolution dans le temps (non reversible), auquel on doit donc ajouter une condition initiale

$$u(t=0,\cdot) = u_0(\cdot).$$

Si $\Omega$ a un bord, alors on doit également y ajouter une condition (par exemple, imposer une valeur à $u$ ou à sa dérivée normale).

- La fonction $f$ peut être choisie parmi les modèles de dynamique des populations (linéaire, logistique, bistable...).
- Pourquoi ajouter un laplacien?
  - Il traduit à l'échelle de l'individu un mouvement aléatoire sans biais.
  - Considérons par exemple un système discret en temps et en espace, et $u_n^i$ la densité de population au point $i\Delta x$ et au temps $n\Delta t$. Alors:

$$u_{n+1}^i = pu_n^{i+1} + pu_n^{i-1} + (1-2p)u_n^i$$

Si la probabilité $p$ de bouger de chaque côté est égale à $d\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, on reconnait un schéma de différences finies pour l'équation

$$\partial_t u = d\Delta u.$$

# Introduction

- La fonction $f$ peut être choisie parmi les modèles de dynamique des populations (linéaire, logistique, bistable...).
- Pourquoi ajouter un laplacien?
  - Il traduit à l'échelle de l'individu un mouvement aléatoire sans biais.
  - Considérons par exemple un système discret en temps et en espace, et $u_n^i$ la densité de population au point $i\Delta x$ et au temps $n\Delta t$. Alors:

    $$u_{n+1}^i - u_n^i = p\left(u_n^{i+1} + u_n^{i-1} - 2u_n^i\right)$$

    Si la probabilité $p$ de bouger de chaque côté est égale à $d\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, on reconnait un schéma de différences finies pour l'équation

    $$\partial_t u = d\Delta u.$$

# Caractère bien posé lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$

- Equation de la chaleur avec terme source:

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u + g(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(t=0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

admet pour solution (lorsque c'est possible)

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4dt}}}{(4\pi t)^{N/2}} u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4d(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{N/2}} g(s,y)\, ds\, dy,$$

au moins pour $u_0, g$ telles que tout soit bien intégrable.

- Ce n'est pas nécessairement l'unique solution, mais c'est l'unique solution qui a un sens physique.
- Si $g \equiv 0$, alors $u \in C^\infty$ même si $u_0 \in L^\infty$ seulement.

# Caractère bien posé lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$

- **Proposition:** *Si $u_{0,1} \leq u_{0,2}$ et $g_1 \leq g_2$, alors les solutions correspondantes de*

$$\begin{cases} \partial_t u^i = d\Delta u^i + g_i, \\ u^i(t=0) = u_{0,i}, \end{cases}$$

*satisfont $u^1 \leq u^2$.*

- Supposons que $0 \leq \inf u_0 \leq \sup u_0 < +\infty$ et que $f$ dans

$$\partial_t u = d\Delta u + f(u),$$

est de classe $C^1$ et vérifie $f(0) = 0$, $0 \leq \inf f' \leq \sup f' < +\infty$. Alors la suite de fonctions définie par la récurrence

$$\begin{cases} \partial_t u^0 = d\Delta u^0 \\ u^0(t=0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_t u^n = d\Delta u^n + f(u^{n-1}), \\ u^n(t=0) = u_0 \end{cases}$$

est croissante et bornée (localement en temps).

# Caractère bien posé lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$

- En passant à la limite dans l'EDP (pas si trivial) on obtient une solution de

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u + f(u) \\ u(t=0) = u_0 \end{cases}$$

- Si $f \in C^1$, $f(0) = 0$ et $\|f'\| < +\infty$, cela suffit quitte à poser

$$v(t,x) = e^{Mt} u(t,x),$$

qui satisfait

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v + e^{Mt} f(v e^{-Mt}) + Mv, \\ v(t=0) = u_0, \end{cases}$$

et on répète le même argument.

# Propagation: quelques exemples

- On va s'intéresser typiquement aux cas de figure suivant:
  - linéaire
  $$\partial_t u = d\Delta u + ru,$$
  - logistique
  $$\partial_t u = d\Delta u + ru(1 - u/K),$$
  - monostable (effet Allee faible)
  $$\partial_t u = d\Delta u + ru(1-u)(1+au), \quad a > 0$$
  - bistable (effet Allee fort)
  $$\partial_t u = d\Delta u + ru(1-u)(1+au), \quad a < 0.$$

# Propagation: cas linéaire

- Supposons que:
  - la dynamique de population suit une loi linéaire (malthusienne)

$$\partial_t u = d\Delta u + ru,$$

  - la population est introduite ponctuellement au temps initial, i.e.

$$u_0 \text{ est à support compact.}$$

- Moralement, la population croit mais pas au même rythme partout.
  - peut-on décrire l'évolution dans le temps de la solution selon la position dans l'espace?

# Propagation: cas linéaire

- On a une formule explicite

$$u(t,x) = e^{rt} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4dt}}}{(4\pi t)^{N/2}} u_0(y)\, dy.$$

- Pour simplifier, prenons $u_0$ une masse de Dirac en 0:

$$u(t,x) = e^{rt - \frac{x^2}{4dt} - \frac{N}{2}\ln t - \frac{N}{2}\ln(4\pi)}$$

Pour $\alpha > 0$, la ligne de niveau $\{x \in \mathbb{R}^N \mid u(t,x) = \alpha\}$ est une sphère de rayon

$$R(t) = 2\sqrt{dr}t - \frac{N}{2}\sqrt{\frac{d}{r}} \ln t + O_{t\to+\infty}(1).$$

La population se propage à la vitesse asymptotique $2\sqrt{dr}$.

# Propagation: cas linéaire

- Formellement, on peut aussi chercher (en dimension $N = 1$) des solutions particulières sous la forme

$$u(t,x) = U(x - ct),$$

i.e. se déplaçant avec un profil constant à la vitesse $c$.

- Alors

$$-cU' = dU'' + rU,$$

et $2\sqrt{dr}$ est la vitesse minimale des solutions positives puisque:

$$U(z) = a_1 e^{-\frac{c-\sqrt{c^2-4rd}}{2d}z} + a_2 e^{-\frac{c+\sqrt{c^2-4rd}}{2d}z}, \qquad \text{si } c > 2\sqrt{dr},$$

$$U(z) = a_1 e^{-\frac{c}{2d}z} \cos\left(\frac{\sqrt{4rd - c^2}}{2d} z + a_2\right), \qquad \text{si } c < 2\sqrt{dr}.$$

# Propagation: cas logistique/F-KPP

- Soit l'équation logistique avec diffusion (ou F-KPP):

$$\partial_t u = d\partial_x^2 u + ru\left(1 - \frac{u}{K}\right), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

avec une condition initiale du type

$$u_0(x) = K\mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Moralement, $K$ et 0 sont deux états d'équilibre. Donc la solution devrait rester proche des deux et la frontière entre se déplacer.
- Cette fois, pas de solution explicite, donc on va seulement chercher des solutions particulières.

# Propagation: cas logistique/F-KPP

- On cherche encore

$$u(t,x) = U(x-ct),$$

et cette fois on impose

$$U(-\infty) = K > U(\cdot) > 0 = U(+\infty).$$

- On doit donc résoudre l'équation différentielle d'ordre 2

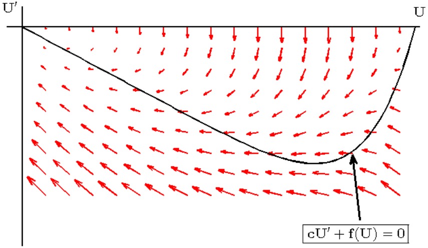
$$dU'' + cU' + rU\left(1 - \frac{U}{K}\right) = 0,$$

à la fois en $U$ et en $c \in \mathbb{R}$, tout en respectant les contraintes ci-dessus.

- On pose $(p, q) = (U, U')$ pour se ramener à un problème d'ordre 1:

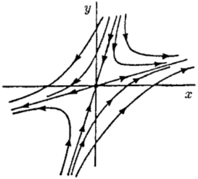
$$\begin{cases} p' = q, \\ q' = -\frac{c}{d} q - \frac{f(p)}{d}. \end{cases}$$

- Plan de phase pour $c > 0$:

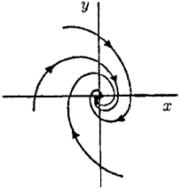


# Propagation: cas logistique/F-KPP (from Murray)

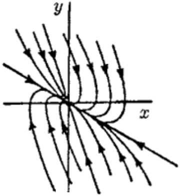
- Zoom sur $(K, 0)$, d'éq. caractéristique $d\lambda^2 + c\lambda + f'(K) = 0$:




- Zoom sur $(0, 0)$, d'éq. caractéristique $d\lambda^2 + c\lambda + f'(0) = 0$:




$c < 2\sqrt{dr}$




$c > 2\sqrt{dr}$

# Propagation: cas logistique/F-KPP

- A ce stade, une condition nécessaire pour l'existence d'un front de vitesse $c$ est
$$c \geq 2\sqrt{dr}.$$
Est-ce que c'est une condition suffisante?
- Pour $c \geq 2\sqrt{dr}$, la solution partant de $(1,0)$ ne peut pas traverser la demi-droite
$$q = -\sqrt{\frac{r}{d}}p, \quad p > 0.$$
En effet, lorsque $q = -\sqrt{\frac{r}{d}}p$, alors
$$\begin{cases} p' = q = -\sqrt{\frac{r}{d}}, \\ q' = -\frac{c}{d}q - \frac{f(u)}{d} \geq -\frac{2\sqrt{dr}}{d}q - \frac{rp}{d} \geq \frac{r}{d}p \end{cases}$$
donc le vecteur tangent orienté $(p', q')$ pointe vers le haut.

# Propagation: cas logistique/F-KPP

- On conclut à l'existence d'un front ssi $c \geq 2\sqrt{dr}$ (from Murray):

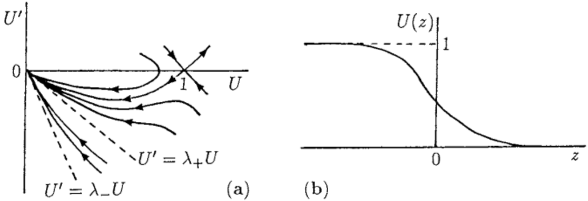



**Figure 13.1. (a)** Phase plane trajectories for equation (13.8) for the travelling wavefront solution: here $c^2 > 4$. **(b)** Travelling wavefront solution for the Fisher–Kolmogoroff equation (13.6): the wave velocity $c \geq 2$.

- On s'attend à ce que la nouvelle espèce se propage à la vitesse $2\sqrt{dr}$ (linéaire, indépendante de $K$).

# Propagation: cas monostable

- Soit l'équation
$$\partial_t u = d\partial_x^2 u + f(u),$$
avec $f(0) = f(1) = 0$ et $f > 0$ sur $]0, 1[$.
- Certains des arguments fonctionnent:
  - pas de front pour $c < 2\sqrt{df'(0)}$;
  - existence de fronts pour $c \geq 2\sqrt{dM}$ avec $M = \sup_{s>0} \frac{f(s)}{s}$.

Il devrait donc exister une vitesse minimale
$$c^* \in [2\sqrt{df'(0)}, 2\sqrt{dM}].$$

- On peut affiner l'argument dans le plan de phase et observer que la trajectoire qui part de $(1,0)$ est de plus en plus "haute" lorsque $c$ augmente:
  - d'abord localement, elle est tangente au vecteur propre de la jacobienne
  $$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{-c+\sqrt{c^2-4df'(1)}}{2d} \end{pmatrix};$$
  - puis globalement en évaluant le système à l'éventuel premier point de contact.

  D'où l'existence de $c^*$ telle qu'un front existe ssi $c \geq c^*$.
- Pour $f(u) = u(1-u)(1+au)$ on a même une formule explicite

$$c^* = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq a \leq 2, \\ \sqrt{2/a} + \sqrt{a/2} & \text{si } a > 2. \end{cases}$$

# Propagation: cas scalaire général

- Plutôt que de nombreux arguments mathématiques, remarquons une analogie avec la mécanique.
- Posons une balle sur un rail de hauteur

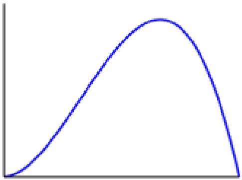
$$y = F(x),$$

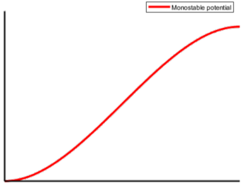
et posons $x(t)$ sa position au temps $t$. Alors la seconde loi de Newton donne:

$$mx''(t) = -cx'(t) + mg \frac{F'(x(t))}{1 + F'(x(t))^2}.$$

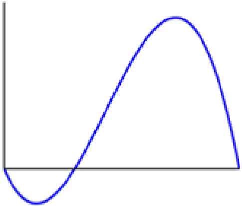
Autrement dit, notre équation différentielle est "presque' celle d'une balle sur un rail de hauteur $\int_0^x f(s)ds$.

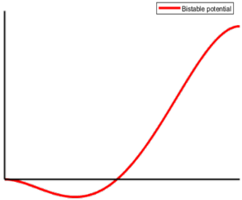
- Fronts pour toute $c \geq c^*$ dans le cas monostable:






- Front pour une unique $c = c^*$ dans le cas bistable:





# Propagation: cas des systèmes

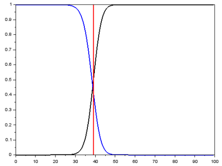
- En général, l'étude de l'espace de phase (dim. double du nombre d'espèces) est délicate.
- On peut au moins se rendre compte numériquement que ce phénomène de propagation est omniprésent.
  - Parfois, la vitesse sera linéaire et calculable explicitement.

Un schéma différence finie semi-implicite est assez efficace:

$$\begin{aligned} & \frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t} \\ = \quad & \frac{u(t+\Delta t,x+\Delta x)+u(t+\Delta t,x-\Delta x)-2u(t+\Delta t,x)}{\Delta x^2} \\ & +f(u(t,x)). \end{aligned}$$

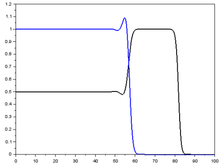
# Propagation: cas des systèmes

- Système compétitif avec $a_{12} > 1 > a_{21}$:



La vitesse est (parfois) linéaire $2\sqrt{d_2 r_2 (1 - a_2 1)}$.

- Système proie-prédateur:



# Question: stabilité des fronts?

- Murray présente un argument de stabilité linéaire, mais très formel.
  - L'idée est de regarder les valeurs propres, mais dans un espace de fonctions de dimension infinie...
  - On y reviendra car les patterns de Turing reposent sur une idée similaire.
- Le fait qu'on observe les fronts numériquement prouve que ces fronts sont stables au moins dans un certain sens.
  - Les fronts bistables sont particulièrement stables (ce qui a aussi des implications biologiques sur la diversité génétique).